

10. Омуров Т.Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. – Бишкек: Илим, 2003. 162 с.
11. Омуров Т.Д., Рыспаев А.О., Омуров М.Т. Обратные задачи в приложениях математической физики. – Бишкек: КНУ, 2014. 192 с.
12. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск гос. ун-т, 1973. 252 с.
13. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
14. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. 496 с.
15. Тобиас Т. Об обратной задаче определения ядра наследственной среды // Изв. АН ЭССР. Физ.-матем., 1984. – №2. – С. 182-187.
16. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – Москва: Мир, 1977. 622 с.

УДК: 528.113:517.968.43

Аширбаев Б. Ы., Апышова Г. Ж.

И.Раззаков атындагы КМТУ,

Ж. Баласагын атындагы КУУ

Аширбаев Б. Ы., Апышова Г. Ж.

КГТУ им. И.Раззакова,

КНУ им. Ж.Баласагына

Ashirbaev B. Y., Apyshova G. Zh.

KSTU I.Razzakov,

KNU J.Balasagyn

СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮКТҮРҮЛГӨН СИСТЕМАНЫН КЫЙМЫЛЫНЫН ЧЕТТЕП КЕТҮҮСҮНҮН ШАРТТАРЫН ЧЫГАРУУ

ВЫВОД УСЛОВИЙ ОЦЕНКИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

DERIVATION OF CONDITIONS FOR ESTIMATING THE ROOT-MEAN-SQUARE DEVIATION OF THE MOTION OF A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM

Аннотация: Сингулярдык дүүлүктүрүлгөн башкарылма кайта келүүчү системанын каалагандай абалдан координата башталышына кайтып келүүсү жана квадраттык функционалдын маанисинин мындай каалагандай кыймылында минималдык болушу негизги талаптардан болуп саналат. Илимий макалада жогорудагыдай кыймылда квадраттык функционалдын маанилерин эсептөөнүн жана сингулярдык дүүлүктүрүлгөн системанын кыймылынын четтеп кетүүсүн баалоонун ыкмалары сунушталды.

Аннотация: Основное требование сингулярно-возмущенной управляемой системы с обратной связью состоит в том, чтобы система возвращалась в начало координат из любого состояния, причем значение квадратического критерия качества вдоль любого такого движения должно быть минимальным. В данной статье предложен способ для вычисления значений квадратичного функционала и определены условия для оценки среднеквадратического отклонения движения сингулярно-возмущенной системы.

Annotation: The main requirement of a singularly perturbed feedback control system is that the system returns to the origin of coordinates from any state, and the value of the quadratic performance criterion along any such movement should be minimal. This article proposes a method for calculating the values of a quadratic functional and determines the conditions for estimating the root-mean-square deviation of the motion of a singularly perturbed system.

Негизги сөздөр: сингулярдык дүүлүктүрүлгөн башкарылма система, квадраттык функционал, өтмө матрица, кыймылдын орточо квадраттык четтеп кетүүсү.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенная управляемая система, квадратичный функционал, переходная матрица, среднеквадратическое отклонения движения.

Keywords: singularly perturbed control system, quadratic functional, transition matrix, standard deviation of motion.

Постановка задачи

Пусть объект управления описывается сингулярно-возмущенным уравнением

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

где $y(t) = (x(t) \ z(t))'$, $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^m$ – векторы переменных состояния,

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \frac{1}{\mu} A_3(t) & \frac{1}{\mu} A_4(t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \frac{1}{\mu} B_2(t) \end{pmatrix}, A_1 - (n \times n), A_2 - (n \times m), A_3 - (m \times n),$$

$A_4 - (m \times m)$, $B_1 - (n \times r)$, $B_2 - (m \times r)$ – матрицы, $u(t) \in R^r$ – вектор управления, $t \in [t_0, t_1]$, μ – малый параметр, $0 < \mu \ll 1$, штрих обозначает транспонирование.

В замкнутом контуре движение системы определяется однородными уравнениями, поэтому ограничимся однородными уравнениями в (1) при $u(t) = 0$.

Рассмотрим квадратичный функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} y'(t) Q(t) y(t) dt, \quad (2)$$

где $Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2'(t) & Q_3(t) \end{pmatrix}.$

Решение задачи

Далее будет показана способ вычисления квадратичного функционала (2). В работе [1] система (1) заменено при $u(t) = 0$ эквивалентной системой, у которой разделены медленные $x(t)$ и быстрые $z(t)$ вектора состояния в виде:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_1(t) \tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \quad (3)$$

$$\mu \dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{A}_4(t) \tilde{z}(t), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0, \quad (4)$$

где

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \mu N(t) \tilde{z}(t), \quad \tilde{z}(t) = z(t) - H(t) x(t), \quad (5)$$

$$\tilde{A}_1(t) = A_1(t) + A_2(t) H, \quad \tilde{A}_4(t) = A_4(t) + \mu H(t) A_2(t),$$

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \mu N \tilde{z}_0, \quad \tilde{z}_0 = z_0 - H x_0.$$

Матрицы $H = H(t)$ и $N = N(t)$ определяются из уравнения [1]:

$$\mu \dot{H} + \mu H \tilde{A}_1(t) - A_3(t) - A_4(t) H = 0, \quad (6)$$

$$\mu \dot{N} - \mu \dot{A}_1(t)N + N\dot{A}_4(t) + A_2(t) = 0. \quad (7)$$

Пусть матрицы $F(t, t_0, \mu)$ и $\Psi(t, t_0, \mu)$ являются переходными матрицами уравнений (3) и (4) соответственно. Тогда справедливы соотношения [2]:

$$\tilde{x}(t, \mu) = F(t, t_0, \mu)\tilde{x}_0, \quad (8)$$

$$\tilde{z}(t, \mu) = \Psi(t, t_0, \mu)\tilde{z}_0. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) из (2) имеем

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{y}'(t_0)G'(t, t_0, \mu)\tilde{Q}(t)G(t, t_0, \mu)\tilde{y}(t_0)dt = \tilde{y}'(t_0)P(t_0, t_1, \mu)\tilde{y}(t_0), \quad (10)$$

где

$$\tilde{y}(t_0) = (\tilde{x}(t_0) \ \tilde{z}(t_0))', \quad P(t_0, t_1, \mu) = \int_{t_0}^{t_1} G'(t, t_0, \mu)\tilde{Q}(t, \mu)G(t, t_0, \mu)dt. \quad (11)$$

Здесь переходная матрица $G(t, t_0, \mu)$, матрица $\tilde{Q}(t, \mu)$ и вектор $y(t, \mu)$ определяются формулами из [1,2]:

$$G(t, t_0, \mu) = \text{diag}(F(t, t_0, \mu) \ \Psi(t, t_0, \mu)), \quad (12)$$

$$\tilde{Q}(t, \mu) = M'(t, \mu)Q(t)M(t, \mu) = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1(t, \mu) & \tilde{Q}_2(t, \mu) \\ \tilde{Q}_2'(t, \mu) & \tilde{Q}_3(t, \mu) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Q}_1(t, \mu) = Q_1(t) + H'Q_2(t) + Q_2(t)H + H'Q_3(t)H,$$

$$\tilde{Q}_2(t, \mu) = Q_2(t) + H'Q_3(t) - \mu\tilde{Q}_1(t, \mu)N,$$

$$\tilde{Q}_3(t, \mu) = Q_3(t) - \mu\tilde{Q}_2'(t, \mu)N - \mu N'\tilde{Q}_2'(t, \mu) + \mu^2 N'\tilde{Q}_1(t, \mu)N,$$

$$y(t, \mu) = M(t, \mu)\tilde{y}(t, \mu), \quad \tilde{y}(t, \mu) = M^{-1}(t, \mu)y(t, \mu),$$

$$M(t, \mu) = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N \\ H & E_m - \mu HN \end{pmatrix}, \quad M^{-1}(t, \mu) = \begin{pmatrix} E_n - \mu NH & \mu N \\ -H & E_m \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если будут известны переходные матрицы $F(t, t_0, \mu)$, $\Psi(t, t_0, \mu)$ и начальные условия $\tilde{y}(t_0)$, то квадратичный функционал (2) можно вычислить формулой (10).

Основное требование системы с обратной связью состоит в том, чтобы система возвращалась в начало координат из любого состояния, причем значение квадратического критерия качества вдоль любого такого движения должно быть минимальным. В связи с этим нам необходимо определить условия для оценки квадратичного функционала (2). Известно [3] что, такая оценка нам дает информацию о длительности по времени переходного процесса приводящего систему (3), (4) в начало координат. В формуле (11) примем $t_0 = t$ и дифференцируем выражение $P(t, t_1, \mu)$ по t имеем

$$\frac{d}{dt}P(t, t_1, \mu) = -\dot{A}'(t, \mu)P(t, t_1, \mu) - P(t, t_1, \mu)\dot{A}(t, \mu) - \tilde{Q}(t, \mu). \quad (13)$$

Матрицу $P(t, t_1, \mu)$ представим в виде

$$P(t, t_1, \mu) = \begin{pmatrix} P_1(t, t_1, \mu) & \mu P_2(t, t_1, \mu) \\ \mu P_2'(t, t_1, \mu) & \mu P_3(t, t_1, \mu) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Из цели оценки следует, что $P(t, t_1, \mu) = 0$, тогда уравнения (13) записывается в виде:

$$\dot{P}_1(t, t_1, \mu) = -\dot{A}'_1(t, \mu)P_1(t, t_1, \mu) - P_1(t, t_1, \mu)\dot{A}_1(t, \mu) - \dot{Q}_1(t, \mu), \quad P_1(t_1, t_1) = 0, \quad (15)$$

$$\mu \dot{P}_2(t, t_1, \mu) = -\mu \dot{A}'_1(t, \mu)P_2(t, t_1, \mu) - P_2(t, t_1, \mu)\dot{A}_4(t, \mu) - \dot{Q}_2(t, \mu), \quad P_2(t_1, t_1) = 0,$$

$$\mu \dot{P}_3(t, t_1, \mu) = -\dot{A}'_4(t, \mu)P_3(t, t_1, \mu) - P_3(t, t_1, \mu)\dot{A}_4(t, \mu) - \dot{Q}_3(t, \mu), \quad P_3(t_1, t_1) = 0.$$

Из формулы (15) замечаем, что решения всех трех уравнений находятся независимо друг от друга и за начальные условия принимаются не в начальный момент времени, а в момент окончания процесса.

Теорема 1. Если блоки матрицы $P(t, t_1, \mu)$ в (14) являются решениями уравнений (15), $\tilde{x}(t, \mu)$ и $\tilde{z}(t, \mu)$ решения системы (3) и (4) соответственно, то справедливо формула

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{y}'(t) \tilde{Q}(t) \tilde{y}(t) dt = \tilde{y}'(t_0) P(t_0, t_1, \mu) \tilde{y}(t_0), \quad (16)$$

где $\tilde{y}(t) = (\tilde{x}(t) \ \tilde{z}(t))'$, $\tilde{y}(t_0) = (\tilde{x}(t_0) \ \tilde{z}(t_0))'$.

Доказательство. При $\mu \rightarrow 0$ из (15) получаем предельную задачу

$$\dot{\bar{P}}_1(t, t_1) = -\dot{\bar{A}}'_0(t) \bar{P}_1(t, t_1) - \bar{P}_1(t, t_1) \dot{\bar{A}}_0(t) - \dot{\bar{Q}}_1(t), \quad \bar{P}_1(t_1, t_1) = 0, \quad (17)$$

$$\bar{P}_2(t, t_1) \dot{A}_4(t) + \dot{\bar{Q}}_2(t) = 0, \quad (18)$$

$$\dot{A}'_4(t) \bar{P}_3(t, t_1) + \bar{P}_3(t, t_1) \dot{A}_4(t) + \dot{\bar{Q}}_3(t) = 0, \quad (19)$$

где

$$\bar{A}_0(t) = A_1(t) - A_2(t) A_4^{-1}(t) A_3(t), \quad (20)$$

$$\bar{Q}_1(t) = Q_1(t) + H'_0(t) Q_2(t) + Q_2(t) H_0(t) + H'_0(t) Q_3(t) H_0(t),$$

$$\bar{Q}_2(t) = Q_2(t) + H'_0 Q_3(t), \quad \bar{Q}_3(t) = Q_3(t), \quad H_0(t) = -A_4^{-1}(t) A_3(t).$$

Второе и третье уравнения системы (15) при $0 < \mu \ll 1$ записываем в виде:

$$\frac{d\bar{P}_2}{d\tau} = -\mu \bar{A}'_1 \bar{P}_2 - \bar{P}_2 \dot{A}_4 - \dot{\bar{Q}}_2, \quad \bar{P}_2(0) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{d\bar{P}_3}{d\tau} = -\dot{A}'_4 \bar{P}_3 - \bar{P}_3 \dot{A}_4 - \dot{\bar{Q}}_3, \quad \bar{P}_3(0) = 0,$$

где $\bar{A}_1 = \bar{A}_1(t) \approx \bar{A}_1(t_1 + \tau\mu)$, $\bar{A}_4 = \bar{A}_4(t) \approx \bar{A}_4(t_1 + \tau\mu)$,
 $\bar{Q}_i = \bar{Q}_i(t) \approx \bar{Q}_i(t_1 + \tau\mu)$, $i = 2, 3$, $\tau = \frac{t-t_1}{\mu} = -\frac{t_1-t}{\mu} = -\lambda$.

Тогда решения задачи (21) можно записать в виде:

$$\bar{P}_2(\tau) = \int_{\tau}^0 \exp(-\mu \bar{A}'_1(\tau-s)) \dot{\bar{Q}}_2 \exp(-\dot{A}_4(\tau-s)) ds, \quad (22)$$

$$\bar{P}_3(\tau) = \int_{\tau}^0 \exp(-\dot{A}'_4(\tau-s)) \dot{\bar{Q}}_3 \exp(-\dot{A}_4(\tau-s)) ds. \quad (23)$$

Предположим, что

Условие 1. Матрицы $\bar{A}_1$ и A_4 устойчивые, то

$$\varphi_2 = \int_0^\infty \exp(\mu \bar{A}_1 s) \bar{Q}_2 \exp(A_4 s) ds, \quad \varphi_3 = \int_0^\infty \exp(A'_4 s) \bar{Q}_3 \exp(A_4 s) ds$$

(24)

соответственно являются единственными решениями уравнений [3]:

$$-\mu \bar{A}'_1 \varphi_2 - \varphi_2 A_4 - \bar{Q}_2 = 0, \quad -A'_4 \varphi_3 - \varphi_3 A_4 - \bar{Q}_3 = 0.$$

(25)

Нам интересен вопрос, при каких условиях решения уравнений (21) стремятся к решениям уравнений (25)? На этот вопрос положительный ответ дает следующая

Теорема 2. При выполнении условия 1 и $\tau \rightarrow -\infty$, $(\mu \rightarrow 0)$, $\bar{P}_3(\tau) \rightarrow \varphi_3$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\int_\tau^0 \exp(A'_4 s) \bar{Q}_3 \exp(A_4 s) ds = \exp(A'_4 \tau) \varphi_3 \exp(A_4 \tau) - \varphi_3.$$

(26)

Доказательство. Пусть равенство (25) выполняется. Функцию $\bar{P}_3(\tau)$ из (23) записываем в виде

$$\bar{P}_3(\tau) = \exp(-A'_4 \tau) \int_\tau^0 \exp(A'_4 s) \bar{Q}_3 \exp(A_4 s) ds \exp(-A_4 \tau).$$

(27)

Тогда с учетом (25) из (27) получаем

$$\bar{P}_3(\tau) = \varphi_3 - \exp(-A'_4 \tau) \varphi_3 \exp(-A_4 \tau).$$

(28)

Пусть теперь, $\bar{P}_3(\tau) \rightarrow \varphi_3$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Тогда интеграл (27) может быть представлен в виде (28), т.е.

$$\exp(-A'_4 \tau) \int_\tau^0 \exp(A'_4 s) \bar{Q}_3 \exp(A_4 s) ds \exp(-A_4 \tau) = \varphi_3 - \exp(-A'_4 \tau) \varphi_3 \exp(-A_4 \tau).$$

Из последнего равенства получаем (26).

Покажем теперь, справедливость второго равенства (26) при условии, что φ_3 решение уравнения (25). Дифференцируя обе части равенства (26) по τ имеем

$$-\exp(A'_4 \tau) \bar{Q}_3 \exp(A_4 \tau) = A'_4 \exp(A'_4 \tau) \varphi_3 \exp(A_4 \tau) + \exp(A'_4 \tau) \varphi_3 \exp(A_4 \tau) A_4.$$

Умножая последнего равенства слева и справа на матрицу $\exp(-A'_4 \tau)$ и $\exp(-A_4 \tau)$ соответственно, получаем уравнение

$$-\bar{Q}_3 = \exp(-A'_4 \tau) A'_4 \exp(A'_4 \tau) \varphi_3 + \varphi_3 \exp(A_4 \tau) A_4 \exp(-A_4 \tau).$$

(29)

Учитывая свойство коммутативности матричной экспоненты для постоянной матрицы A_4 : $\exp(A_4 \tau) A_4 = A_4 \exp(A_4 \tau)$ из (29) получаем $-A'_4 \varphi_3 - \varphi_3 A_4 - \bar{Q}_3 = 0$ ч.т.д.

Следствие 1. Вычисление квадратичного функционала (2) сводится к решению алгебраических уравнений (25) на полубесконечном интервале $(0, \infty)$.

Следствие 2. Если матрицы $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$ равномерно ограничены и равномерно непрерывными вместе со своими производными при $t \in [t_0, t_1]$ и матрицы $\bar{A}_0(t)$, $A_4(t)$ устойчивы при $t \in [t_0, t_1]$, то найдется число μ такое, что при $0 < \mu < \mu_0$ решения задач (15) существуют и являются единственными на отрезке $[t_0, t_1]$.

Решения задач (17) – (19), (22), (23) могут служить в качестве асимптотические решения задач для оценки квадратичного функционала (2) и при вычислении величины

квадратичного функционала (2) обеспечиваются более точные результаты чем решения задачи (10) – (12).

Список цитируемых источников:

1. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы., Баракова Ж.Т. Разделение движений в управляемых системах с сингулярными возмущениями //Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, №8, Бишкек, 2006. - С.75-79.
2. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. О переходных матрицах медленных и быстрых подсистем управляемой системы с малым параметром /Труды межд. научной конференции посв. 70 летию акад. М.И. Иманалиева //Вестник КГНУ им. Ж. Баласагына. Серия 3. Естест.-тех. науки. - Вып.6, Бишкек, 2001. - С. 235- 239.
3. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - М:Наука,1976.424 с.