

УДК 517.9

Алыбаев А.М.

Ж. Баласагын атындагы КУУ

Алыбаев А.М.

КНУ им. Ж.Баласагына

Anarbek M. Alybaev

KNU J.Balasagyn

**ВОЛЬТЕРРДИН БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ТУУРА ЭМЕС КОЮЛГАН ИНТЕГРАЛДЫК
ТЕНДЕМЕСИ ПАЙДА БОЛУУЧУ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕНИ КЛАССИКАЛЫК ЭМЕС
ПРЕДЕЛИ МЕНЕН ИНТЕГРАЛДООНУ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО
РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ,
ВЫРОЖДАЮЩАЯ НЕКОРРЕКТНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА
С НЕКЛАССИЧЕСКИМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
REGULARIZATION OF THE INVERSE PROBLEM IN AN UNBOUNDED DOMAIN
DEGENERATING ILL-POSED THE FIRST KIND VOLTERRA EQUATION
WITH A NONCLASSICAL INTEGRATION LIMIT**

Аннотация: атематикалык физикада Вольтеррдин биринчи, экинчи жана үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемелери пайда болуучу ар кандай түз жана тескери маселелер изилденген. Көрсөтүлгөн мүнөздөгү маселелер толкундар теориясында, нымдуулук алып жүрүчүлүк жана геофизиканын тескери маселелеринде ж.б. кездешет. Бул эмгекте чектелбеген областта чыгарылышы Дирактын функциясы менен байланышкан Вольтеррдин биринчи түрдөгү теңдемеси пайда болуучу толкундар теориясынын коэффициенттүү тескери маселеси каралат. Бул областтагы изилдөөлөр дагы эле аягына чыга элек, мына ушунун өзү каралып жаткан маселенин актуалдуулугун көрсөтөт.

Аннотация: В математической физике исследованы различные прямые и обратные задачи, где вырождаются уравнения Вольтерра первого, второго и третьего родов. Задачи указанного характера встречаются в проблемах влагопереноса, в теории волн, в обратных задачах геофизики и др. В работе рассматривается коэффициентная обратная задача в неограниченной области в теории волн, где вырождается уравнение Вольтерра первого рода, чье решение связано с функцией Дирака. Исследования в этой области еще не завершены, в чем и заключается актуальность данной работы.

Abstract. In mathematical physics various direct and inverse problems are studied, where the first, second and third kind Volterra equations degenerate. Problems of this nature are encountered in moisture transfer problems, in the waves theory, in inverse problems of geophysics, etc. The paper researches the coefficient inverse problem in an unbounded domain in the waves theory, where the first kind Volterra equation degenerates, whose solution is related to the Dirac function. Research in this area has not yet been completed, which is the relevance of this work.

Негизги сөздөр: Тескери маселе, Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин туура эмес коюлушу, бир маанилүү чыгарылыштуулук, жардамчы функциялардын методу, кеңейтилген маанидеги регуляризациялоо методу.

Ключевые слова: Обратная задача, некорректность интегральных уравнений Вольтерра первого рода, однозначная разрешимость задачи, метод вспомогательных функций, регуляризуемость задачи, метод регуляризации в обобщенном смысле.

Keywords: Inverse problem, ill-posedness of the first kind Volterra integral equations, unique solvability of the problem, auxiliary functions method, regularizability of the problem, regularization method in a generalized sense.

1. Введение

Важное значение в области обратных задач (ОЗ) [3,4,11,12,15] и другие имеют задачи, где вырождаются линейные, нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого или третьего рода (ИУВ-1 или ИУВ-3) с особыми решениями. Так как при исследовании этих уравнений в тех пространствах возникают некоторые проблемные вопросы, связанные с установлением близости решение параметризованного ИУ к реальному решению исследуемого уравнение. Поэтому для исследования указанного вопроса нами предложены различные способы, связанные с методом регуляризации (МР) в обобщенном смысле [4,7,10] и др., но общая методология еще не разработана.

Отметим, что уравнения, которое содержится в исследуемой ОЗ является разновидностью дифференциального уравнение (ДУ) Аллера, неоднородного нелинейного уравнения Шредингера-Уиземи (НУШУ) в действительной области в теории волн, обобщенного уравнения деформации наследственной среды в неограниченной области [2,5,8,9,16] и др.

В связи с этим рассмотрим ОЗ с интегро-дифференциальным оператором вида:

$$V_t - b^2 V_{xx} + K_0(x) [\Phi(V) + \int_0^t \Psi(t-\tau) V(\tau, x - b(t-\tau)) \frac{\partial}{\partial x} [V_\tau(\tau, x) - b V_x(\tau, x)] d\tau] = (J\theta)(t), \forall (t, x) \in \bar{D}_0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} V(t, x) \Big|_{t=0}^{(j)} = \varphi_j(x), \forall x \in R, (j = (0, 1)); \forall (t, x) \in \bar{D}_0, \\ (V_t - b V_x) \Big|_{x=x_0} = g(t), \forall t \in [0, T], (D_0 = (0, T) \times R, x_0 \in R), \end{cases} \quad (2)$$

$$(J\theta)(t) \equiv \lambda \int_0^{M(t)} K(t, \eta) \theta^2(\eta) d\eta \quad (3)$$

с условиями:

$$а) \quad 0 < b, 0 < \lambda < 1, (b, Y_0, \lambda = const); K_0(x) \in C(R); \Phi(V) \in C^1(R),$$

$$\sup |\Phi_V^{(j)}| \leq L_j, (j = 0, 1); \Phi_V(V) \in C(R) \cap Lip(V|_{L_{\Phi_V}}); \Psi(t) \in C^1[0, T]; D_1 = \bar{D}_0 \times R,$$

причем:

$$\int_R K_0(x) dx \leq \tilde{K}_0 = const,$$

$$например: K_0(x) \equiv e^{-\beta x^2} \text{ или } K_0(x) \equiv \frac{1}{1 + \beta x^2}, \beta > 0; (\lim_{x \rightarrow \pm\infty} K_0(x) = 0),$$

$$б) \quad g(t) \in C^1[0, T], \varphi_i(x) \in C^1(R), (i = 0, 1); |g_t^{(j)}(t)| \leq C_{01}; |\varphi_i(x)|, |\varphi_{ix}(x)|, (i, j = 0, 1),$$

$$в) \quad K(t, s) \in C(D) \cap Lip(t|_{L_K}), 0 < L_K = const; 0 \leq K(t, t), K(0, 0) \neq 0; |K(\cdot)| \leq C_{02},$$

$$D = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\},$$

г) $0 \leq M(t) \leq t \leq T, M(0) = 0, M(t) \in C[0, T] \cap Lip(t|L_M), 0 < L_M = const,$

где $b, \lambda, g(t), \varphi_i(x), \Phi, \Psi, M, K$ - известные данные, так как в рамках требуемых условий вектор функция $P = (V, \theta)$ является неизвестным. Здесь:

$$P \in G_{[C^{2,2}(\bar{D}_0); Z^2(0, T)]}(D_0) \equiv G_{[C^2; Z^2]}(D_0)$$

с нормой

$$\begin{cases} \|P\|_{G_{[C^2; Z^2]}} = \|V\|_{C^{2,2}(\bar{D}_0)} + \|\theta\|_{Z^2(0, T)}, \\ \|V\|_{C^{2,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{j=0}^2 \|V_{x^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \sum_{j=1}^2 \|V_{t^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)}. \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что при изучении ОЗ (1), (2) вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1 вида:

$$\lambda \int_0^{M(t)} K(t, s) \theta^2(s) ds = F(t) \quad (5)$$

с условием

д) $F(t) \in C[0, T] \cap Lip(t|L_F); F(t) \geq \alpha > 0, \forall t \in [0, T]; |F(t)| \leq C_{03} = const,$

т.е. $\theta(t) \notin C[0, T]$, так как ИУВ (5) с условием (д) некорректно поставлено в $C[0, T]$. Поэтому регуляризируемость этого уравнения в обобщенном смысле исследуется в $Z^2(0, T)$ - пространстве, чьи элементы - все суммируемые с квадратом функции из $L^2[0, T]$, а также сингулярные обобщенные функции $z(t)$, сосредоточенные в начале отрезка $[0, T]$. Например, если существует пробная функция $\vartheta(t)$, тогда

$$\langle \vartheta, \vartheta \rangle = \vartheta(0), (\vartheta \in Z^2, Z = \sqrt{\delta(t)}).$$

Замечание 1. Если относительно ОЗ (1), (2) предположим

$$\begin{cases} V_t - bV_x = U(t, x), \\ U(0, x) = (V_t - bV_x)|_{t=0} = \varphi_1(x) - b\varphi_{0x}(x) \equiv \psi_0(x), \\ U(t, x_0) = (V_t - bV_x)|_{x=x_0} = g(t), ((\psi_0(x_0) = g(0))), \end{cases} \quad (6)$$

то имеем:

$$\begin{cases} V = \varphi_0(x + bt) + \int_0^t U(\tau, x + b(t - \tau)) d\tau \equiv (A_1 U)(t, x), \\ V_t = b\varphi_{0l}(x + bt) + U(t, x) + b \int_0^t U_h(\tau, x + b(t - \tau)) d\tau, \\ V_x = \varphi_{0l}(x + bt) + \int_0^t U_h(\tau, x + b(t - \tau)) d\tau, \\ l = x - bt; h = x - b(t - \tau), (l_t = -b, l_x = 1; h_t = -b, h_x = 1). \end{cases} \quad (7)$$

Значит на основе (6), (7) из (1) следует нелинейное ИДУ вида:

$$U_t + bU_x + K_0(x)[\Phi(A_t U)] + \int_0^t \Psi(t-\tau)(A_t U)(\tau, x-b(t-\tau)) \frac{\partial}{\partial x} U(\tau, x) d\tau = (J\theta)(t) \quad (8)$$

с условием

$$\begin{cases} U(0, x) = \psi_0(x), \forall x \in R, \\ U(t, x_0) = g(t), \forall t \in [0, T], (\psi_0(x_0) = g(0)). \end{cases} \quad (9)$$

Полученное уравнение (8) является обобщением уравнения Уиземи [16].

Отметим, что в работе [9] была изучена прямая задача Коши для уравнения вида:

$$U_t + \lambda(t)UU_x = (\mathcal{K}U)(t, x) \quad (10),$$

где $\mathcal{K}$ - линейный интегральный оператор с областью интегрирования R , при этом решение рассматривалось в обобщенном смысле.

Аналогичная прямая задача для ДУ была решена в пространстве Банаха в работе [5] и др., и для решения этой задачи был разработан специальный метод «Метод дополнительного аргумента - МДА». Далее, на основе этого метода были изучены различные классы прямых задач для ДУ и ИДУ в частных производных из теории нелинейных волн в пространстве Банаха.

Ниже относительно ОЗ (8), (9) в неограниченной области не применимы методы, разработанные вышеуказанных работах. Следовательно, так как не можем привести к интегральному виду уравнение (8) с теми известными методами вспомогательных функций (МВФ), то естественно возникает вопрос: Каким образом преобразовать уравнение (8) к интегральному виду, а тем более в случае (1)? Поэтому нет необходимости преобразовать (1) к виду (8), так как такое трансформирование не приведет (1) к интегральному виду.

В связи с этим для интегролизации ОЗ (1), (2) покажем один из новых вариантов МВФ, которое связано с интегральным оператором, содержащее вспомогательную функцию (или МИО – метод интегральных операторов). Далее, на основе разрешимости полученного ИУ и доказывается разрешимость уравнения (1). Кроме того, так как здесь вырождается некорректное ИУВ-1 с условием (в-д), то вопросы регуляризации и единственности решения исходной ОЗ рассматривается в $G_{[C^2; Z^2]}(D_0)$.

2. Интегролизация ОЗ

Чтобы интегролизировать ОЗ, сперва на основе векторной функции

$P_0 = (Q, \theta)$ предположим:

$$\begin{cases} V_t - bV_x = \psi(x-bt) + (\mathfrak{I}[Q, \theta])(t, x), \\ \mathfrak{I}[Q, \theta] \equiv \int_0^t [(J\theta)(s) + \int_{x-b(t-s)}^x K_0(\tau)Q(s, \tau) d\tau] ds, \\ \psi(x) \equiv \varphi_1(x) - \varphi_{0x}(x), (\psi(x_0) = g(0)), \end{cases} \quad (11)$$

при этом имеет место:

$$\left\{ \begin{aligned}
V &= \varphi_0(x+bt) + \int_0^t \{ \psi(x+b(t-s)-bs) + \int_0^s [(J\theta)(s') + \int_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)} K_0(\tau) \times \\
&\times Q(s', \tau) d\tau] ds' \} ds \equiv (A_0[Q, \theta])(t, x), \\
V_{t^2} - bV_{xt} &= -b\psi_l(x-bt) + (J\theta)(t) + b \int_0^t K_0(x-b(t-s))Q(s, x-b(t-s))ds \equiv \\
&\equiv (A_1[Q, \theta])(t, x), \\
V_{tx} - bV_{x^2} &= \psi_l(x-bt) + \int_0^t [K_0(x)Q(s, x) - K_0(x-b(t-s))Q(s, x-b(t-s))]ds \equiv \\
&\equiv (A_2Q)(t, x), (\bar{l} = x-bt), \\
V_{t^2} - b^2V_{x^2} &= (J\theta)(t) + \int_0^t K_0(x)Q(s, x)ds.
\end{aligned} \right. \quad (12)$$

Тогда, учитывая (11), (12), из (1) следует интегральное соотношение вида:

$$\begin{aligned}
&(J\theta)(t) + \int_0^t K_0(x)Q(s, x)ds + K_0(x)\{ \Phi((A_0[Q, \theta])(t, x)) + \int_0^t \Psi(t-s)(A_0[Q, \theta])(s, x-b(t-s)) \times \\
&\times (A_2Q)(s, x)ds \} = (J\theta)(t)
\end{aligned}$$

или дифференцируя по t , имеем ИУ:

$$\left\{ \begin{aligned}
Q(t, x) &= -\{ \Phi_\rho((A_0[Q, \theta])(t, x)) [b\varphi_{0l}(x+bt) + \psi(x-bt) + \int_0^t b\psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)ds + \\
&+ \int_0^t (J\theta)(s)ds + \int_0^t \int_{x-b(t-s)}^x K_0(\tau)Q(s, \tau)d\tau ds + \int_0^t \int_0^s [K_0(x+b(t-s))Q(s', x+b(t-s)) - \\
&- K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s', x+b(t-s)-b(s-s'))]d\tau ds' ds \} + \Psi(0)(A_0[Q, \theta])(t, x) \times \\
&\times (A_2Q)(t, x) + \int_0^t \Psi_t(t-s)(A_0[Q, \theta])(s, x-b(t-s)) \times (A_2Q)(s, x)ds + \\
&+ \int_0^t \Psi(t-s)[-b\varphi_{0l_4}(x-b(t-s)+bs) + \int_0^s \{ -b\psi_{l_3}(x-b(t-s)+b(s-s')-bs') - \\
&- b \int_0^{s'} [K_0(x-b(t-s)+b(s-s'))Q(\tilde{s}, x-b(t-s)+b(s-s')) - K_0(x-b(t-s)+b(s-s') - \\
&- b(s'-\tilde{s}))Q(\tilde{s}, x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))]d\tilde{s} \} ds'] \times (A_2Q)(s, x)ds \equiv \\
&\equiv (A_3[Q, \theta])(t, x), \\
l &= x+bt; \quad l_1 = x+b(t-s)-bs; \quad l_4 = x-b(t-s)+bs, \\
l_3 &= x-b(t-s)+b(s-s')-bs', \quad (l_t = b, l_{1t} = b, l_{4t} = -b, l_{3t} = -b).
\end{aligned} \right. \quad (13)$$

Далее, так как ИУ (13) содержит неизвестную векторную функцию $P_0 = (Q, \theta)$, то, на основе (2), (12) из (11) получим

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^t [(J\theta)(s) = g(t) - \{\psi(x_0 - bt) + \int_0^t \int_{x_0 - b(t-s)}^{x_0} K_0(\tau)Q(s, \tau)d\tau\}ds] &\equiv (BQ)(t, x_0), \\ (A_0[Q, \theta])(t, x) &\equiv \varphi_0(x + bt) + \int_0^t \{\psi(x + b(t-s) - bs) + (BQ)(s, x_0) + \\ &+ \int_0^s \int_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)} K_0(\tau)Q(s', \tau)d\tau ds'\}ds \equiv (\mathcal{A}_0 Q)(t, x). \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Следовательно, подставляя (14) в (13), получим интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} Q(t, x) = & -\{\Phi_\rho((\mathcal{A}_0 Q)(t, x)) [b\varphi_{0l_1}(x + bt) + \psi(x - bt) + \int_0^t b\psi_{l_2}(x + b(t-s) - bs)ds + \\ & + (BQ)(t, x_0) + \int_0^t \int_{x-b(t-s)}^x K_0(\tau)Q(s, \tau)d\tau ds + \int_0^t \int_0^s [K_0(x + b(t-s))Q(s', x + b(t-s)) - \\ & - K_0(x + b(t-s) - b(s-s'))Q(s', x + b(t-s) - b(s-s'))]d\tau ds' ds] + \Psi(0)(\mathcal{A}_0 Q)(t, x) \times \\ & \times (A_2 Q)(t, x) + \int_0^t \Psi_t(t-s)(\mathcal{A}_0 Q)(s, x - b(t-s)) \times (A_2 Q)(s, x)ds + \\ & + \int_0^t \Psi(t-s)[-b\varphi_{0l_3}(x - b(t-s) + bs) + \int_0^s \{-b\psi_{l_4}(x - b(t-s) + b(s-s') - bs') - \\ & - b \int_0^{s'} [K_0(x - b(t-s) + b(s-s'))Q(s', x - b(t-s) + b(s-s')) - K_0(x - b(t-s) + b(s-s') - \\ & - b(s' - s))Q(s', x - b(t-s) + b(s-s') - b(s' - s))]d\tau ds'] \times (A_2 Q)(s, x)ds \equiv (AQ)(t, x). \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что предлагаемый вариант МИО (11), с учетом (14), который имеет вид:

$$V_t - bV_x = \psi(x - bt) + (BQ)(t, x_0) + \int_0^t \int_{x-b(t-s)}^x K_0(\tau)Q(s, \tau)d\tau ds \equiv (\mathcal{A}_0 Q)(t, x), \quad (16)$$

причем

$$V = (\mathcal{A}_0 Q)(t, x), \quad (17)$$

содержит новую искомую функцию Q , при этом служит полной интегролизацией нелинейного уравнения (1). Достоинством разработанного МИО является тот факт, что исследуемое ИДУ редуцируется к системе ИУВ-2 (15), (17) по переменной $t \in [0, T]$, для которого хорошо развиты теория исследований.

В самом деле, для доказательства последнего предложения, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. Пусть оператор A допускает условия:

$$\left\{ \begin{aligned} A: L_A < 1, \\ \|AQ_0\|_C &\leq r(1 - L_A). \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Тогда ИУ (15) однозначно разрешимо в $C(\bar{D}_0)$ при этом и функция Q_x ограничено в смысле $C(\bar{D}_0)$. Следовательно, на основе (17) функция V существует единственным образом в $C^{2,2}(\bar{D}_0)$.

Доказательство. В самом деле, при условии (18) оператор A является сжимающим, причем имеет место неравенство [14]:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_r(Q_0) = \{Q : |Q - Q_0| \leq r, \forall (t, x) \in \bar{D}_0\}, \\ \|AQ_0\|_C \leq r(1 - L_A): \\ \|AQ - Q_0\|_C = \|AQ - Q_0 - AQ_0 + AQ_0\| \leq \|AQ - AQ_0\| + \|AQ_0 - Q_0\| \leq \\ \leq L_A r + r(1 - L_A) = r, \\ |Q| \leq r_0, \forall (t, x) \in \bar{D}_0, \end{array} \right.$$

т.е. $A: S_r(0) \rightarrow S_r(0)$, а это значит, что на основе принципа Банаха ИУ (15) действительно однозначно разрешимо в $C(\bar{D}_0)$.

Кроме того, чтобы доказать равномерной ограниченности функции Q_x , сперва, дифференцируем (15) по x , а далее, оценим это выражение. Для этого, введя обозначение вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_x(t, x) \equiv W(t, x), \\ \frac{\partial}{\partial x} (A_0 Q)(t, x) \equiv \varphi_{01}(x + bt) + \int_0^t \{\psi_{l_1}(x + b(t - s) - bs) + \\ + \int_0^s [K_0(x + b(t - s))Q(s', x + b(t - s)) - K_0(x + b(t - s) - b(s - s')) \times \\ \times Q(s', x + b(t - s) - b(s - s'))] ds' \} ds \equiv (A_{01} Q)(t, x), \\ \frac{\partial}{\partial x} (A_2 Q)(t, x) = \psi_{l_2}(x - bt) + \int_0^t [K_{0x}(x)Q(s, x) + K_0(x)W(s, x) - \\ - K_{0l_2}(x - b(t - s))Q(s, x - b(t - s)) - K_0(x - b(t - s))W(s, x - b(t - s))] ds \equiv \\ \equiv (A_{02} [Q, W])(t, x), \end{array} \right. \quad (19)$$

и учитывая функцию Q_x , на основе дифференцирования (15) по x , имеем:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& Q_x(t, x) \equiv W(t, x), \\
& W(t, x) = -\{\Phi_{\rho\rho}((\mathcal{A}_0^0 Q)(t, x))(\mathcal{A}_{01}^0 Q)(t, x)[b\varphi_{01}(x+bt) + \psi(x-bt) \\
& + \int_0^t b\psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)ds + (BQ)(t, x_0) + \int_0^t \int_{x-b(t-s)}^x K_0(\tau)Q(s, \tau)d\tau ds + \\
& + \int_0^t \int_0^s [K_0(x+b(t-s))Q(s', x+b(t-s)) - K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s', x+ \\
& + b(t-s)-b(s-s'))]d\tau ds' ds\} + \Phi_{\rho}((\mathcal{A}_0^0 Q)(t, x))[b\varphi_{01}(x+bt) + \psi(x-bt) + \\
& + \int_0^t b\psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)ds + \int_0^t [K_0(x)Q(s, x) - K_0(x-b(t-s))Q(s, x- \\
& - b(t-s))]ds + \int_0^t \int_0^s [K_{0l_2}(x+b(t-s))Q(s', x+b(t-s)) + K_0(x+b(t-s)) \times \\
& \times W(s', x+b(t-s)) - K_{0l_3}(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s', x+b(t-s)-b(s-s')) - \\
& - K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))W(s', x+b(t-s)-b(s-s'))]ds' ds\} + \\
& + \Psi(0)[(\mathcal{A}_{01}^0 Q)(t, x)(A_2 Q)(t, x) + (\mathcal{A}_0^0 Q)(t, x)(\mathcal{A}_{02}^0 [Q, W])(t, x)] + \\
& + \int_0^t \Psi_t(t-s)[(\mathcal{A}_{01}^0 Q)(s, x-b(t-s))(A_2 Q)(s, x)ds + (\mathcal{A}_0^0 Q)(s, x-b(t-s)) \times \\
& \times (\mathcal{A}_{02}^0 [Q, W])(s, x)]ds + \int_0^t \Psi(t-s)[-b\varphi_{0l_1}(x-b(t-s)+bs) + \int_0^s \{-b\psi_{l_3}(x- \\
& - b(t-s)+b(s-s')-bs') - b \int_0^{s'} ([K_{0l_5}(x-b(t-s)+b(s-s'))Q(\mathfrak{F}_0 x-b(t-s)+ \\
& + b(s-s')) + K_0(x-b(t-s)+b(s-s'))W(\mathfrak{F}_0 x-b(t-s)+b(s-s')) - \\
& - K_{0l_6}(x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\mathfrak{F}_0))Q(\mathfrak{F}_0 x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\mathfrak{F}_0)) - \\
& - K_0(x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\mathfrak{F}_0))W(\mathfrak{F}_0 x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\mathfrak{F}_0))]d\mathfrak{F}_0 \times \\
& \times ds'] (A_2 Q)(s, x)ds + \int_0^t \Psi(t-s)[-b \int_0^s \int_0^{s'} [K_0(x-b(t-s)+b(s-Q)(s, x)s')Q(\mathfrak{F}_0 x- \\
& - b(t-s)+b(s-s')) - K_0(x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\mathfrak{F}_0))Q(\mathfrak{F}_0 x-b(t-s)+ \\
& + b(s-s')-b(s'-\mathfrak{F}_0))]d\mathfrak{F}_0 ds'] (\mathcal{A}_{02}^0 [Q, W])(s, x)ds \equiv (\mathcal{A}_0^0 [Q, W])(t, x).
\end{aligned} \right. \quad (20)
\end{aligned}$$

Значит, с учетом (20) функция $Q_x \equiv W$ допускает оценку вида:

$$\begin{cases} \|W(t, x)\|_C \leq (1 - L_{\bar{A}})^{-1} [T_0 + C_0 \|Q\|_C] \leq (1 - L_{\bar{A}})^{-1} [T_0 + C_0 r_0], \\ 0 < L_{\bar{A}} < 1, \end{cases}$$

где $0 < T_0 = \text{const}$ - наибольшее значение суммы всех членов с известными функциями, которые содержатся в качестве свободного члена (20). Это значит, действительно функция $Q_x \equiv W$ ограничена в смысле $C(\bar{D}_0)$.

Далее, на основе доказанных условий леммы 1 и с учетом (17) можем сказать, что и функция V однозначным образом определена в $C^{2,2}(\bar{D}_0)$, причем, так как это пространство

связано с функциями: $V, V_t, V_x, V_{t^2}, V_{x^2}, V_{tx}$, то учитывая частные производные по совокупности аргументов имеем:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &Q_x(t, x) \equiv W(t, x), \\
 &V = (A_0^0 Q)(t, x) = \varphi_0(x + bt) + \int_0^t \{ \psi(x + b(t-s) - bs) + \int_0^s [(BQ)(s', x_0) + \\
 &+ \int_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)} K_0(\tau) Q(s', \tau) d\tau] ds' \} ds, \\
 &V_t = b\varphi_{0l}(x + bt) + \psi(x - bt) + \int_0^t (BQ)(s', x_0) ds' + \int_0^t b\psi_{l_1}(x + b(t-s) - bs) ds + \\
 &+ \int_0^t \int_{x-b(t-s')}^x K_0(\tau) Q(s', \tau) d\tau ds' + \int_0^t \int_0^s b[K_0(x + b(t-s))Q(s', x + b(t-s)) + \\
 &+ K_0(x + b(t-s) - b(s-s'))Q(s', x + b(t-s) - b(s-s'))] ds' ds, \\
 &V_x = \varphi_{0l}(x + bt) + \int_0^t \psi_{l_1}(x + b(t-s) - bs) ds + \int_0^t \int_0^s [K_0(x + b(t-s)) \times \\
 &\times Q(s', x + b(t-s)) - K_0(x + b(t-s) - b(s-s'))Q(s', x + b(t-s) - b(s-s'))] ds' ds, \\
 &V_{t^2} = b^2\varphi_{0ll}(x + bt) + (BQ)(t, x_0) + \int_0^t b^2\psi_{l_1l_1}(x + b(t-s) - bs) ds + \\
 &+ b \int_0^t \int_{x-b(t-s')}^x K_0(x - b(t-s'))Q(s', x - b(t-s')) ds' + \int_0^t b[K_0(x)Q(s', x) + \\
 &+ K_0(x - b(t-s'))Q(s', x - b(t-s'))] ds' + \int_0^t \int_0^s b^2[K_{0l_2}(x + b(t-s))Q(s', x + b(t-s)) + \\
 &+ K_0(x + b(t-s))W(s', x + b(t-s)) + K_{0l_3}(x + b(t-s) - b(s-s'))Q(s', x + \\
 &+ b(t-s) - b(s-s')) + K_0(x + b(t-s) - b(s-s'))W(s', x + b(t-s) - b(s-s'))] ds' ds, \\
 &V_{x^2} = \varphi_{0ll}(x + bt) + \int_0^t \psi_{l_1l_1}(x + b(t-s) - bs) ds + \int_0^t \int_0^s [K_{0l_2}(x + b(t-s))Q(s', x + \\
 &+ b(t-s)) + K_0(x + b(t-s))W(s', x + b(t-s)) - K_{0l_3}(x + b(t-s) - b(s-s'))Q(s', x + \\
 &+ b(t-s) - b(s-s')) - K_0(x + b(t-s) - b(s-s'))W(s', x + b(t-s) - b(s-s'))] ds' ds, \\
 &V_{tx} = b\varphi_{0ll}(x + bt) + \psi_{\bar{l}}(x - bt) + \int_0^t b\psi_{l_1l_1}(x + b(t-s) - bs) ds + \int_0^t [K_0(x)Q(s', x) - \\
 &- K_0(x - b(t-s'))Q(s', x - b(t-s'))] ds' + \int_0^t \int_0^s b[K_{0l_2}(x + b(t-s))Q(s', x + b(t-s)) + \\
 &+ K_0(x + b(t-s))W(s', x + b(t-s)) + K_{0l_3}(x + b(t-s) - b(s-s'))Q(s', x + b(t-s) - \\
 &- b(s-s')) + K_0(x + b(t-s) - b(s-s'))W(s', x + b(t-s) - b(s-s'))] ds' ds.
 \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Из формулы (21) видно, что правая сторона всех функций $V, V_t, V_x, V_{t^2}, V_{x^2}, V_{tx}$, связаны с функциями $Q, Q_x \equiv W$. Это означает, что все указанные функции $V, V_t, V_x, V_{t^2}, V_{x^2}, V_{tx}$ будут

ограниченными для любого $(t, x) \in \bar{D}_0$ (равномерно), так как эти оценки связаны с условиями леммы 1. Следовательно, функция $V \in C^{2,2}(\bar{D}_0)$ однозначно определяются в этом пространстве и допускают оценку в смысле нормы $C^{2,2}(\bar{D}_0)$, т.е.

$$\|V\|_{C^{2,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{j=0}^2 \|V_{x^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \sum_{j=1}^2 \|V_{t^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} \leq N_0 = \text{const}.$$

Ч.т.д.

3. Регуляризация ИУВ-1

Так как в пункте 2 относительно функции V доказана лемма 1, то с учетом (14) и (3), на основе дифференцирования по t , следует некорректное нелинейное ИУВ-1 вида:

$$(J\theta)(t) \equiv \lambda \int_0^{M(t)} K(t, \eta) \theta^2(\eta) d\eta = F(t), \quad (22)$$

где

$$F(t) \equiv g'(t) - \{-b\psi_l(x_0 - bt) + b \int_0^t [K_0(x_0 - b(t-s))Q(s, x_0 - b(t-s))] ds\}$$

и известные функции удовлетворяют условиям (в-д).

Для доказательства регуляризируемости уравнения (22) в $Z^2(0, T)$ воспользуемся следующей схемой, т.е., сперва, преобразуем (22) к виду:

$$\begin{cases} \int_0^t h(\tau) \theta(\tau) d\tau = (H\theta)(t) + F(t), \\ H\theta \equiv \int_0^t h_0(\tau) \theta(\tau) (J\theta)(\tau) d\tau - (J\theta)(t), \end{cases} \quad (23)$$

причем известные функции, содержащиеся (23) определяются по правилу:

$$\left\{ \begin{array}{l}
h(t) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda(t)] F(t) \geq m > 0, (1 < \gamma = \text{const}), \\
h_0(t) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda(t); 0 \leq \lambda(t) \in L^1(0, T), \\
\phi_0(t) = \int_0^t [\gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda(\tau)] F(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) d\tau, \\
F_0(t) \equiv F(t) - F(0); F_0(0) = 0, \\
h_0(t) \leq \alpha^{-1} h(t); |F_0(t)| \leq C_{04}, \forall t \in [0, T], \\
0 < \max C_{0j} = C_1, (j = \overline{1, 4}), \\
|F_0(t) - F_0(\tau)| \leq L_{F_0} M_0 (\phi_0(t) - \phi_0(\tau)), (\tau \leq t; \gamma > 1; M_0 = \frac{1}{\gamma \alpha}), \\
t \in [0, T]: t = (t^{\frac{2}{7}})^{\frac{7}{2}} \leq (\phi_0(t))^{\frac{7}{2}}, (\lambda(t) = \frac{2}{7\sqrt[7]{t^5}}), \\
t \leq M_1 (\phi_0(t))^2, (M_1 = \sup_{[0, T]} (\phi_0(t))^{\frac{3}{2}}).
\end{array} \right. \quad (24)$$

Поэтому, наряду с ИУ (23) вводится уравнение с малым параметром ε , вида

$$\left\{ \begin{array}{l}
\varepsilon \theta_\varepsilon(t) + (\Phi \theta_\varepsilon)(t) = F_\varepsilon(t), \\
(\Phi \theta_\varepsilon)(t) \equiv \int_0^t h(\tau) \theta_\varepsilon(\tau) d\tau - (H \theta_\varepsilon)(t),
\end{array} \right. \quad (25)$$

и решение этого уравнения ищем в виде

$$\left\{ \begin{array}{l}
\theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(t) + \nu(t) + \xi_\varepsilon(t), \\
\Pi_\varepsilon(0) = F(0), \quad \nu(0) = 0, \quad \xi_\varepsilon(0) = 0.
\end{array} \right. \quad (26)$$

Тогда, на основе (25) неизвестные функции $\Pi_\varepsilon(t), \nu(t), \xi_\varepsilon(t)$ определяются из системы вида:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Pi_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t h(\tau) \Pi_\varepsilon(\tau) d\tau + F(0), \\
\int_0^t h(\tau) \nu(\tau) d\tau = (H \nu)(t) + F_0(t), \\
\varepsilon \xi_\varepsilon + \int_0^t h(\tau) \xi_\varepsilon(\tau) d\tau = (H[\frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon + \nu + \xi_\varepsilon])(t) - (H \nu)(t) + F_\varepsilon(t) - F(t) - \varepsilon \nu(t).
\end{array} \right. \quad (27)$$

Лемма 2. Если допускаются условия леммы 1 и ((в-д), (24), (26)), то относительно системы (27) имеют место:

$$\text{А) } \Pi_\varepsilon(t) = F(0) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(t)), \quad (28)$$

с оценкой

$$|\Pi_\varepsilon(t)| \leq C_1 \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(t)); \quad (29)$$

Б) решение параметризованного ИУ

$$\delta v_\delta(t) + \int_0^t h(\tau) v_\delta(\tau) d\tau = (Hv_\delta)(t) + F_0(t) \quad (30)$$

равномерно сходится к решению второго уравнения системы (27) при $\delta \rightarrow 0$, так как указанное ИУ имеет решение в $C[0, T]$;

В) третье ИУ системы (27) однозначно разрешимо в $C[0, T]$, причем равномерно сходится к нулю, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. А) В самом деле, так как существует резольвента:

$$R(t, \tau, \varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon} h(\tau) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^t h(s) ds), (\tau \leq t), \quad (31)$$

для ядра $(-\frac{1}{\varepsilon} h(s))$, то из первого уравнения системы (27) следует (28).

При этом функция $\Pi_\varepsilon(t)$ определяется единственным образом по правилу (28), где из (28) следует оценка (29).

Б) Проверим, второе условие леммы 2, т.е., это условие относительно функции $v_\delta(t) \in C[0, T]$. Для этого на основе условий ((в-д), (24)) покажем, что второе ИУ системы (27) регуляризируемо в $C[0, T]$.

В самом деле, учитывая резольвенту (29) ИУ (30) с малым параметром $\delta \in (0, 1)$ преобразуется к виду

$$\left\{ \begin{aligned} & v_\delta = -\frac{1}{\delta^2} \int_0^t h(s) \exp(-\frac{1}{\delta} \int_s^t h(s') ds') \{ (Hv_\delta)(s) - (Hv_\delta)(t) + F_0(s) - F_0(t) \} ds + \\ & + \frac{1}{\delta} \exp(-\frac{1}{\delta} \int_0^t h(s') ds') \{ (Hv_\delta)(t) + F_0(t) \} = -\frac{1}{\delta^2} \int_0^t h(\tau) \exp(-\frac{1}{\delta} (\phi_0(t) - \phi_0(\tau))) \times \\ & \times \lambda \{ \int_0^\tau h_0(\tau) v_\delta(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) v_\delta^2(\bar{\tau}) d\bar{\tau} d\tau - \int_0^t h_0(\tau) v_\delta(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) v_\delta^2(\bar{\tau}) d\bar{\tau} d\tau - \\ & - \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) v_\delta^2(\bar{\tau}) d\bar{\tau} + \int_0^{M(t)} K(t, \bar{\tau}) v_\delta^2(\bar{\tau}) d\bar{\tau} d\tau + \frac{1}{\delta} \lambda \{ \int_0^t h_0(\tau) v_\delta(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) \times \\ & \times v_\delta^2(\bar{\tau}) d\bar{\tau} d\tau - \int_0^{M(t)} K(t, \tau) v_\delta^2(\tau) d\tau \} \exp(-\frac{1}{\delta} \phi_0(t)) + \Delta_1(F_0, \delta) \equiv Pv_\delta(x), \\ & \Delta_1(F_0, \delta) \equiv -\frac{1}{\delta^2} \int_0^t h(s) \exp(-\frac{1}{\delta} \int_s^t h(s') ds') \{ F_0(s) - F_0(t) \} ds + \\ & + \frac{1}{\delta} F_0(t) \exp(-\frac{1}{\delta} \int_0^t h(s') ds'). \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Действительно, так как имеем неравенства вида:

$$\left\{ \begin{aligned}
& |\Delta_1(F_0, \delta)| \leq \left| \frac{1}{\delta^2} \int_0^t h(s) \exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t) - \phi_0(s))) L_{F_0}(t-s) ds + \right. \\
& + L_{F_0} \frac{t}{\delta} \exp(-\frac{1}{\delta} \phi_0(t)) \leq \frac{1}{\alpha \gamma} L_{F_0} \int_0^t \exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t) - \phi_0(s))) \frac{1}{\delta} (\phi_0(t) - \phi_0(s)) \times \\
& \times d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t) - \phi_0(s))) + L_{F_0} M_1 \delta (\frac{1}{\delta} \phi_0(t))^2 \exp(-\frac{1}{\delta} \phi_0(t)) \leq \\
& \leq L_{F_0} [\frac{1}{\alpha \gamma} + 2^2 e^{-2} M_1 \delta] \leq L_0, \\
& \int_0^\infty e^{-z} z dz = 1; 0 < L_P = 4\lambda \{C_0 r_1 (M_0 L_M + \frac{1}{\alpha} Tr_1) + L_K T M_0 r_1\} < 1, \\
& P: S_{r_1}(0) \rightarrow S_{r_1}(0) = \{v_\delta(t) \in C[0, T]: |v_\delta(t)| \leq r_1, \forall t \in [0, T]\}, \\
& \rho \equiv \frac{1}{\delta} \phi_0(t); \chi(\rho) \equiv \rho^k \exp(-\rho); \sup_{\rho \geq 0} \chi(\rho) = k^k \exp(-k), \\
& \rho = 0: \chi(0) = 0; \rho \rightarrow \infty: \chi \rightarrow 0, (k = 1, 2),
\end{aligned} \right. \quad (33)$$

то из оценки уравнение (32) следует

$$\|v_\delta\|_C \leq (1 - L_P)^{-1} L_0 = N_0, \quad (34)$$

где L_P — коэффициент Липшица оператора P .

Поэтому, не нарушая хронологию исследований предположим

$$v_\delta = v(x) + \mu_\delta(t), \forall t \in [0, T]. \quad (35)$$

Тогда, подставляя это выражение в (32) относительно остаточного члена, получим

$$\delta \mu_\delta + \frac{1}{\delta} \int_0^t h(s) \mu_\delta(s) ds = (H[v + \mu_\delta])(t) - (Hv)(t) - \delta v(t),$$

или с учетом резольвенты имеем

$$\left\{ \begin{aligned}
& \mu_\delta = -\frac{1}{\delta^2} \int_0^t h(s) \exp(-\frac{1}{\delta} \int_s^t h(s') ds') \{ (H[v + \mu_\delta])(s) - (Hv)(s) - (H[v + \mu_\delta])(t) + \\
& + (Hv)(t) - \delta(v(s) - v(t)) \} ds + \frac{1}{\delta} \{ (H[v + \mu_\delta])(t) - (Hv)(t) \} \exp(-\frac{1}{\delta} \int_0^t h(s) ds) - \\
& - v(x) \exp(-\frac{1}{\delta} \int_0^t h(s) ds) \equiv (P_0 \mu_\delta)(t) + \Delta(v, \delta) \equiv (P_0 \mu_\delta)(t), \\
& \Delta(v, \delta) \equiv -\frac{1}{\delta} \int_0^t h(s) \exp(-\frac{1}{\delta} \int_s^t h(s') ds') \{ -v(s) + v(t) \} ds - v(t) \exp(-\frac{1}{\delta} \int_0^t h(s) ds).
\end{aligned} \right. \quad (36)$$

Пусть

$$\begin{cases} \|\Delta(v, \delta)\|_C \leq 3\|v(t)\|_C \exp\left(-\frac{1}{\delta^{1-\beta}}\right) + \omega_v(\delta^\beta), (0 < \beta < 1), \\ \omega_v(\delta^\beta) = \sup\left\{\|v(\phi_0^{-1}(t)) - v(\phi_0^{-1}(s))\|; |t-s| \leq \delta^\beta\right\}, \\ |v| \leq \tilde{r}_1, \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} S_{r_2}(0) = \{\mu_\delta : |\mu_\delta| \leq r_2, \forall t \in [0, T]\}, \\ 0 < L_{P_0} = \lambda\{C_0[(2\beta_0 + r_2)(2M_0L_M + \frac{1}{\alpha}2T\beta_0 + \frac{1}{\alpha}2T(\beta_0 + r_2)^2) + TM_0L_K(2\beta_0 + r_2)]\} < 1, \end{cases}$$

где $\omega_v(\delta^\beta)$ - модуль непрерывности, $\phi_0^{-1}(t)$ - обратная к функции:

$$\phi_0(t) = \int_0^t h(s) ds.$$

Тогда из ИУ (36) получим

$$\begin{cases} \|\mu_\delta(x)\|_C \leq (1 - L_{P_0})^{-1} \|\Delta(v, \delta)\|_C, \\ P_0 : S_{r_2}(0) \rightarrow S_{r_2}(0). \end{cases} \quad (38)$$

Кроме того, если для любого

$$\delta \in (0, \delta_0], \delta_0 = \left(\ln\left(6(1 - L_{P_0})^{-1}\right)\right)^{-\frac{1}{1-\beta}}, \quad (39)$$

то, с учетом (35) получим оценку

$$\begin{cases} \|v_\delta(t) - v(t)\|_C \leq (1 - L_{P_0})^{-1} \|\Delta(v, \delta)\|_C \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \\ \|v(t)\|_C = \|v(t) - v_\delta(t) + v_\delta(t)\|_C \leq (1 - L_{P_0})^{-1} \|\Delta(v, \delta)\|_C + N_0 \\ \text{или} \\ \|v(t)\|_C \leq (1 - d)^{-1} [N_0 + (1 - L_{P_0})^{-1} \omega_v(\delta^\beta)] \leq \tilde{r}_1, \\ d = 3(1 - L_{P_0})^{-1} \exp\left(-\frac{1}{\delta^{1-\beta}}\right) < 1, \end{cases} \quad (40)$$

причем, когда $\delta \rightarrow 0$ из (40) следует $v_\delta(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} v(t), \forall t \in [0, T]$, т.е. действительно, второе ИУ системы (27) регуляризируемо в $C[0, T]$. А это означает, что относительно функции $v(t)$ выполняются второе условие леммы 2. Ч.т.д.

В) Далее, покажем, что относительно функции $\xi_\varepsilon(t)$ имеют место аналогичные результаты, как в случае (38), (или третье условие леммы 2). С этой целью, рассматривая третье ИУ относительно $\xi_\varepsilon(t)$ из системы (27), на

основе резольвенты (31), имеем

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) = & -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t h(s) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t h(s') ds'\right) \{ (H[\nu + \xi_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon])(s) - (H\nu)(s) - \\ & - (H[\nu + \xi_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon])(t) + (H\nu)(t) \} ds + \frac{1}{\varepsilon} \{ (H[\nu + \xi_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon])(t) - (H\nu)(t) \} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t h(s') ds'\right) + \Delta_2(F_\varepsilon, F, \varepsilon) + \Delta_*(\nu, \varepsilon) \equiv (P_1 \xi)(t), \end{aligned} \quad (41)$$

где выражения $\Delta(\cdot), \Delta_2(\cdot)$ определяются в виде

$$\begin{cases} \Delta_*(\nu, \varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t h(s) \left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t h(s') ds'\right) (-\nu(s) + \nu(t)) \right) ds - \nu(t) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t h(s') ds'\right), \\ \Delta_2(F_\varepsilon, F, \varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t h(s) \left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t h(s') ds'\right) (F_\varepsilon(s) - F(s)) \right) ds + \frac{1}{\varepsilon} (F_\varepsilon(t) - F(t)). \end{cases}$$

Если будет иметь место:

$$\begin{cases} L_{P_1} < 1, \\ P_1 : S_{r_3}(0) \rightarrow S_{r_3}(0), \end{cases}$$

то уравнение (41) однозначно разрешимо в $C[0, T]$.

В самом деле, при оценках следующих интегральных выражений, где содержится функция $\xi_\varepsilon(t)$, получим неравенства:

$$\begin{cases} |a_1| \left| \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(t)\right) \lambda \left\{ \int_0^{M(t)} K(t, \tau) [2\nu(\tau) \xi_\varepsilon(\tau) + \xi_\varepsilon^2(\tau) + 2\frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\tau) \xi_\varepsilon(\tau)] d\tau + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^t h_0(\tau) \nu(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) [2\nu(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \xi_\varepsilon^2(\bar{\tau}) + 2\frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau})] d\bar{\tau} d\tau \right\} \right| \leq \\ \leq \lambda \{ C_1 M_0 L_M e^{-1} (2\beta_0 + r_3) + L_M M_1 e^{-2} C_1^2 + \frac{1}{\alpha} T C_1 e^{-1} \beta_0 (2\beta_0 + r_3) + \frac{1}{\alpha} 2M_0 \beta_0 C_1^2 \} \times \\ \times \|\xi_\varepsilon(t)\|_C = d_1 \|\xi_\varepsilon(t)\|_C; \\ \left| \frac{1}{\varepsilon^3} \left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(t)\right) \lambda \left\{ \int_0^t h_0(\tau) \Pi_\varepsilon(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) [(2\nu(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \xi_\varepsilon^2(\bar{\tau})) \varepsilon + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2\Pi_\varepsilon(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau})] d\bar{\tau} d\tau + \int_0^t h_0(\tau) \xi_\varepsilon(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) [(\nu(\bar{\tau}) + \xi_\varepsilon(\bar{\tau})) \varepsilon + \Pi_\varepsilon(\bar{\tau})]^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times d\bar{\tau} d\tau \right\} \right| \leq \lambda \{ \sqrt{\varepsilon} L_M \beta_0 C_1^2 \left(\frac{7}{2} e^{-1} \right)^{\frac{7}{2}} [(2\beta_0 + r_3) \varepsilon + 2C_1] + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\varepsilon} C_1 L_M \beta_0 \left(\frac{7}{2} e^{-1} \right)^{\frac{7}{2}} \} \times \\ \times [(\beta_0 + r_3) \varepsilon + C_1]^2 \|\xi_\varepsilon(t)\|_C = d_2 \|\xi_\varepsilon(t)\|_C, \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ a_2 \right\} \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t h(s) \left(\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} (\phi_0(t) - \phi_0(s)) \right) \lambda \left\{ \int_0^{M(s)} (K(t, \tau) - K(s, \tau)) [2\nu(\tau) \xi_\varepsilon(\tau) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \xi_\varepsilon^2(\tau) + 2 \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\tau) \xi_\varepsilon(\tau) \right] d\tau + \int_{M(s)}^{M(t)} K(t, \tau) [2\nu(\tau) \xi_\varepsilon(\tau) + \xi_\varepsilon^2(\tau) + 2 \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\tau) \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \xi_\varepsilon(\tau) \right] d\tau \right\} ds \leq \lambda \{ L_K M_0 C_1 (2\beta_0 + r_3) + 2L_K (C_1 M_0)^2 + L_M M_0 C_1 (2\beta_0 + r_3) + \\
& \quad + 4M_1 C_1^2 (2e^{-2} + 1) \} \|\xi_\varepsilon(t)\|_C = d_3 \|\xi_\varepsilon(t)\|_C; \\
& \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t h(s) \left(\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} (\phi_0(t) - \phi_0(s)) \right) \lambda \left\{ \int_s^t h_0(\tau) \nu(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) [2\nu(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \xi_\varepsilon^2(\bar{\tau}) + 2 \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) \right] d\bar{\tau} d\tau + \int_s^t h_0(\tau) \xi_\varepsilon(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) [2\nu(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \xi_\varepsilon^2(\bar{\tau}) + 2 \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) \right] d\bar{\tau} d\tau + \int_s^t h_0(\tau) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) [2\nu(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \xi_\varepsilon^2(\bar{\tau}) + 2 \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\bar{\tau}) \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) \right] d\bar{\tau} d\tau \right\} \leq \lambda \left\{ \frac{1}{\alpha} C_1 T \beta_0 (2\beta_0 + r_3) + \frac{1}{\alpha} 2M_0 \beta_0 C_1^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\alpha} C_1 T (2\beta_0 + \beta_0 + r_3^2) + \frac{1}{\alpha} 2M_0 C_1^2 (\beta_0 + r_3) + \frac{1}{2\alpha} 3M_1 C_1^3 + \frac{1}{\alpha} 2\varepsilon L_M M_1 C_1^2 \times \right. \\
& \quad \left. \times (2\beta_0 + r_3) + \frac{1}{\varepsilon} 4M_1 C_1^3 (2e^{-1} + 1) \right\} \|\xi_\varepsilon(t)\|_C = d_4 \|\xi_\varepsilon(t)\|_C; \\
& S_{r_3}(0) = \{ \xi_\varepsilon : |\xi_\varepsilon| \leq r_3, \forall t \in [0, T] \}; \sup_{[0, T]} \int_0^t h_0(s) ds \leq \beta_0 = \text{const}, \\
& \int_0^{M(t)} \frac{1}{\varepsilon} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(s) \right) ds \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{M(t)} \frac{1}{\alpha \gamma} (\gamma + \alpha^{-1} \lambda(s)) F(s) \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(s) \right) ds = \\
& = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{M(t)} \frac{1}{\alpha \gamma} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(s) \right) d \left(\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(s) \right) = M_0 [1 - \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(M(t)) \right)] \leq \\
& \leq M_0, \forall t \in [0, T], (h(s) \equiv (\gamma + \alpha^{-1} \lambda(s)) F(s)), \\
& \rho \equiv \frac{1}{\delta} \phi_0(t); \chi(\rho) \equiv \rho^k \exp(-\rho); \sup_{\rho \geq 0} \chi(\rho) = k^k \exp(-k), \\
& \rho = 0: \chi(0) = 0; \rho \rightarrow \infty: \chi \rightarrow 0, (k = 1, 2, \frac{7}{2}), \\
& \int_0^x \frac{1}{\varepsilon^3} \exp \left(-\frac{2}{\varepsilon} (\phi_0(\bar{\tau})) \right) d\bar{\tau} = \frac{1}{\varepsilon^3} \bar{\tau} \exp \left(-\frac{2}{\varepsilon} (\phi_0(\bar{\tau})) \right) \Big|_0^x + \int_0^x \frac{1}{\varepsilon^3} \bar{\tau} \exp \left(-\frac{2}{\varepsilon} (\phi_0(\bar{\tau})) \right) d \left(\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\bar{\tau}) \right) \leq \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon^3} x \exp \left(-\frac{2}{\varepsilon} (\phi_0(x)) \right) + \frac{1}{\sqrt{2^7}} \sqrt{\varepsilon} \int_0^x \left(\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\bar{\tau}) \right)^{\frac{7}{2}} \exp \left(-\frac{2}{\varepsilon} (\phi_0(\bar{\tau})) \right) d \left(\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\bar{\tau}) \right) d\bar{\tau} \leq \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{2^7}} \sqrt{\varepsilon} \left[\left(\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(x) \right)^{\frac{7}{2}} \exp \left(-\frac{2}{\varepsilon} (\phi_0(x)) \right) + \int_0^{\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(x)} \rho^{\frac{7}{2}} e^{-\rho} d\rho \right] \leq \frac{1}{\sqrt{2^7}} \sqrt{\varepsilon} \left[\left(\frac{7}{2} \right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \right. \\
& \left. + \int_0^\infty \rho^{\frac{7}{2}} e^{-\rho} d\rho \right] = \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2^7}} \left[\left(\frac{7}{2} \right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105\sqrt{\pi}}{16} \right] = T_1 \sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Поэтому, коэффициент сжатия оператора P_1 вычисляется по правилу:

$$\begin{cases} L_{P_1} = \sum_{i=1}^4 d_i < 1, \\ P_1 : S_{r_3}(0) \rightarrow S_{r_3}(0). \end{cases} \quad (43)$$

Отсюда видно, что выполнимость условие (43) возможен, так как $0 < \lambda < 1$, кроме того, известные интегральные члены:

$$\begin{cases} \Psi_1(t, \varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon} (\exp(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(t)) \lambda \{ - \int_0^{M(t)} K(t, \tau) [2v(\tau) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\tau) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi_\varepsilon^2(\tau)] d\tau + \\ + \int_0^t h_0(\tau) v(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) [2v(\bar{\tau}) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi_\varepsilon^2(\bar{\tau})] d\bar{\tau} d\tau + \\ + \int_0^t h_0(\tau) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) [v^2(\bar{\tau}) + 2v(\bar{\tau}) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi_\varepsilon^2(\bar{\tau})] d\bar{\tau} d\tau \}, \\ \Psi_2(t, \varepsilon) \equiv - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t h(s) (\exp(-\frac{1}{\varepsilon} (\phi_0(t) - \phi_0(s))) \lambda \{ \int_0^{M(s)} [K(t, \tau) - K(s, \tau)] \times \\ \times [2v(\tau) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\tau) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi_\varepsilon^2(\tau)] d\tau + \int_{M(s)}^{M(t)} K(t, \tau) [2v(\tau) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\tau) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi_\varepsilon^2(\tau)] d\tau, \\ \Psi_3(t, \varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t h(s) (\exp(-\frac{1}{\varepsilon} (\phi_0(t) - \phi_0(s))) \lambda \{ \int_s^t h_0(\tau) v(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) \times \\ \times [2v(\bar{\tau}) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi_\varepsilon^2(\bar{\tau})] d\bar{\tau} d\tau + \int_s^t h_0(\tau) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\tau) \int_0^{M(\tau)} K(\tau, \bar{\tau}) [v^2(\bar{\tau}) + \\ + 2v(\bar{\tau}) \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi_\varepsilon^2(\bar{\tau})] d\bar{\tau} d\tau \} ds, \end{cases} \quad (44)$$

также регулярны относительно малого параметра, как и в случае (42), значит (34) также допускает условие:

$$\left| \sum_{i=1}^3 \Psi_i(t, \varepsilon) \right| \leq \sum_{i=1}^3 |\Psi_i(t, \varepsilon)| \leq Q_0(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \forall t \in [0, T]. \quad (45)$$

Следовательно, с учетом (43), (45) и:

$$\begin{cases} \|\Delta_*(v, \varepsilon)\|_C \leq 3\|v(t)\|_C \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) + \omega_v(\varepsilon^\beta), (0 < \beta < 1), \\ |F_\varepsilon(t) - F(t)| \leq \Delta_0(\varepsilon), \forall t \in [0, T], (\frac{1}{\varepsilon} \Delta_0(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0), \\ |\Delta_2(F_\varepsilon, F, \varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t h(\tau) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} (\phi_0(t) - \phi_0(\tau))) \Delta_0(\varepsilon) d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \Delta_0(\varepsilon) \leq \frac{2}{\varepsilon} \Delta_0(\varepsilon), \end{cases} \quad (46)$$

из оценки (41) имеем

$$\|\xi_\varepsilon(t)\|_C \leq (1 - L_{P_1})^{-1} [Q_0(\varepsilon) + \|\Delta_*(v, \varepsilon)\|_C + \frac{2}{\varepsilon} \Delta_0(\varepsilon)] = \Delta_3(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (47)$$

Это значить, что во-первых при выполнении (47) функция $\xi_\varepsilon(t)$ равномерно сходится к нулю, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, во-вторых определяется единственным образом как решение уравнение (41). Поэтому, действительно функция $\xi_\varepsilon(t)$ допускает условие леммы 2. Ч.т.д.

Из полученных условий относительно системы (27) следуют следующие выводы:

1) при выполнении условий леммы 2, с учетом (26) решение параметризованного ИУ (25) сходится к решению второго уравнение системы (27) для $\forall x \in (0, T]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (неравномерная сходимость), т.е.:

$$\begin{cases} |\theta_\varepsilon - v| \leq \Delta_3(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} |\Pi_\varepsilon(t)| \leq \Delta_2(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} C_1 \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(t)), \\ |\Pi_\varepsilon(t)| \leq C_1 \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \phi_0(t)), \end{cases} \quad (48)$$

2) кроме того имеет место равенство:

$$x=0: \theta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} F(0).$$

Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если допускаются условия леммы 2 и (38), то следуют:

$$1) \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,T)} \leq \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_1 e^{-\frac{7}{4}} [(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16} \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \quad (49)$$

$$2) \|\theta_\varepsilon - v\|_{Z^2(0,T)} \leq 2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt{T} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \quad (50)$$

$$3) \|(\Phi \theta_\varepsilon)(t) - F(t)\|_{Z^2(0,T)} \leq \tilde{M}(\varepsilon), (\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0). \quad (51)$$

Доказательство. Действительно, условие (49) следует из оценки (48) в смысле нормы пространства $Z^2(0, T)$, т.е.:

$$\begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2} \leq C_1 (\sup_{[0,T]} \int_0^t \exp(-\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\tau)) d\tau)^{\frac{1}{2}} = C_1 \sup_{[0,T]} [\tau \exp(-\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\tau))]_0^t + \\ + \int_0^t \tau \exp(-\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\tau)) d(\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\tau))^{\frac{1}{2}} = C_1 \sup_{[0,T]} [t \exp(-\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(t)) + \int_0^t 2^{-\frac{7}{2}} \varepsilon^{\frac{7}{2}} (\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\tau))^{\frac{7}{2}} \times \\ \times \exp(-\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\tau)) d(\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(\tau))^{\frac{1}{2}}] \leq C_1 2^{-\frac{7}{4}} \varepsilon^{\frac{7}{4}} \sup_{[0,T]} [(\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(t))^{\frac{7}{2}} \exp(-\frac{2}{\varepsilon} \phi_0(t)) + \\ + \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{\frac{7}{2}} d\rho]^{\frac{1}{2}} \leq C_0 2^{-\frac{7}{4}} \varepsilon^{\frac{7}{4}} [(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16} \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}} = \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, \\ \rho \equiv \frac{1}{\varepsilon} \phi_0(t); \chi(\rho) \equiv \rho^k \exp(-\rho); \sup_{\rho \geq 0} \chi(\rho) = k^k \exp(-k), (k=1, 2, \frac{7}{2}), \\ \rho=0: \chi(0)=0; \rho \rightarrow \infty: \chi \rightarrow 0. \end{cases}$$

Далее, чтобы доказать (50), на основе первого соотношения формулы (48) проводим оценку в смысле метрики $Z^2(0, T)$, с учетом результатов леммы 2 и (47), (49), и неравенства:

$$(a_1 + a_2)^n \leq 2^n (a_1^n + a_2^n), \quad a_1 \geq 0, a_2 \geq 0.$$

Тогда, действительно из (48) следует оценка вида:

$$\|\theta_\varepsilon - v\|_{Z^2} \leq 2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt{T} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon).$$

А это означает, что и выполняется неравенство (50).

С другой стороны, так как в прямом смысле не можем подтвердить близости функций $\theta_\varepsilon(t), \theta(t)$ ни в каком смысле, то естественно вводится понятие регуляризируемости в обобщенном смысле в $Z^2(0, T)$ с оценкой (51).

Чтобы показать (51), сперва, учитывая оценку вида:

$$|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)| = |\varepsilon\theta_\varepsilon + (\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F_\varepsilon(t) - \varepsilon(\theta_\varepsilon - \nu + \nu) + F_\varepsilon(t) - F(t)|, \quad (52)$$

где функция $F(t)$ свободный член ИУВ (22) (или (23)), а оператор $(\Phi\theta_\varepsilon)(t)$ определяется в виде (25).

Далее, переходя из (52) по норме $Z^2(0, T)$ получим

$$\begin{aligned} \|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\|_{Z^2(0, T)} &\leq 4\|F_\varepsilon(t) - F(t)\|_{Z^2} + \varepsilon\|\theta_\varepsilon(t) - \nu(t)\|_{Z^2} + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{T} \leq \\ &\leq 4[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt{T} + \varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon) + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{T}] = \tilde{M}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Ч.т.д.

Из полученных результатов, в итоге имеем:

Утверждение 1. При условиях лемм 1;2 и теоремы 1 ОЗ (1), (2) регуляризуема в $G_{[C^2; Z^2]}(D_0)$ в обобщенном смысле.

В статье исследована ОЗ, где вырождается некорректное ИУВ-1 с неклассическим пределом интегрирования, причем решение ИУВ-1 построено с помощью сингулярного МР, предварительно преобразовав исходное ИУ на основе модификации метода работы [10]. При этом выявлены достаточные условия однозначной разрешимости и регуляризируемости в обобщенном смысле ОЗ в $G_{[C^2; Z^2]}(D_0)$.

Список цитируемых источников:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. 352 с.
2. Аллер М. Эффективный потенциал воды при высыхании почв //Термодинамика почвенной влаги. – Л.: Гидрометеиздат, 1966. – С. 325-360.
3. Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. –Новосибирск: Наука, 1983.- 207с.
4. Дмитриев В.И. Обратные задачи электромагнитных методов геофизики //Некорректные задачи естествознания.- М.: МГУ, 1987. – С. 54-76.
5. Иманалиев М.И., Ведь Ю.А. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 23, №3. – С. 465-477.
6. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализ. -М.:Наука, 1980. 288с.
7. Лаврентьев М.М. Регуляризация операторных уравнений типа Вольтерра //Проблема мат.физ. и вычислит. матем. -М.: Наука, 1977.-С.199-205.
8. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, (пер. с англ.), 1989. 326 с.
9. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Обобщенные решения для уравнения Уизема //Дифференц. уравнения. - 1992. - Т.28, №1. - С.121-126.

10. Омуров Т.Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. – Бишкек: Илим, 2003. 162 с.
11. Омуров Т.Д., Рыспаев А.О., Омуров М.Т. Обратные задачи в приложениях математической физики. – Бишкек: КНУ, 2014. 192 с.
12. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск гос. ун-т, 1973. 252 с.
13. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
14. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. 496 с.
15. Тобиас Т. Об обратной задаче определения ядра наследственной среды // Изв. АН ЭССР. Физ.-матем., 1984. – №2. – С. 182-187.
16. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – Москва: Мир, 1977. 622 с.

УДК: 528.113:517.968.43

Аширбаев Б. Ы., Апышова Г. Ж.

И.Раззаков атындагы КМТУ,

Ж. Баласагын атындагы КУУ

Аширбаев Б. Ы., Апышова Г. Ж.

КГТУ им. И.Раззакова,

КНУ им. Ж.Баласагына

Ashirbaev B. Y., Apyshova G. Zh.

KSTU I.Razzakov,

KNU J.Balasagyn

СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮКТҮРҮЛГӨН СИСТЕМАНЫН КЫЙМЫЛЫНЫН ЧЕТТЕП КЕТҮҮСҮНҮН ШАРТТАРЫН ЧЫГАРУУ

ВЫВОД УСЛОВИЙ ОЦЕНКИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

DERIVATION OF CONDITIONS FOR ESTIMATING THE ROOT-MEAN-SQUARE DEVIATION OF THE MOTION OF A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM

Аннотация: Сингулярдык дүүлүктүрүлгөн башкарылма кайта келүүчү системанын каалагандай абалдан координата башталышына кайтып келүүсү жана квадраттык функционалдын маанисинин мындай каалагандай кыймылында минималдык болушу негизги талаптардан болуп саналат. Илимий макалада жогорудагыдай кыймылда квадраттык функционалдын маанилерин эсептөөнүн жана сингулярдык дүүлүктүрүлгөн системанын кыймылынын четтеп кетүүсүн баалоонун ыкмалары сунушталды.

Аннотация: Основное требование сингулярно-возмущенной управляемой системы с обратной связью состоит в том, чтобы система возвращалась в начало координат из любого состояния, причем значение квадратического критерия качества вдоль любого такого движения должно быть минимальным. В данной статье предложен способ для вычисления значений квадратичного функционала и определены условия для оценки среднеквадратического отклонения движения сингулярно-возмущенной системы.